北京市西城区 2010 — 2011 学年度第一学期期末

高三数学试卷（文科）

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x\geq -1\}$， $B=\{x\,|\,x<3\}$，那么集合 $A\cap B=$

A．$\{x\,|\,-1\leq x<3\}$　　B．$\{x\,|\,-1<x<3\}$

C．$\{x\,|\,x<-1\}$　　D．$\{x\,|\,x>3\}$

2. 下列函数中，图象关于坐标原点对称的是

A．$y=\lg x$　　B．$y=\cos x$

C．$y=|x|$　　D．$y=\sin x$

3. 若 $a>b$，则下列不等式正确的是

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$a^3>b^3$　　C．$a^2>b^2$　　D．$a>|b|$

4. 命题“若 $a>b$，则 $a+1>b$”的逆否命题是

A．若 $a+1\leq b$，则 $a>b$　　B．若 $a+1<b$，则 $a>b$

C．若 $a+1\leq b$，则 $a\leq b$　　D．若 $a+1<b$，则 $a<b$

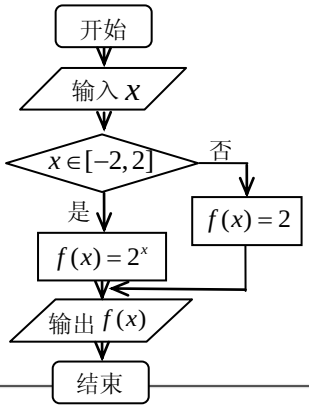
5. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_2=4$， $a_5=7$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为

A．12　　B．60　　C．75　　D．120

6. 阅读右面程序框图，如果输出的函数值在区间 $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 内，那么输入实数 x 的取值范围是

A．$(-\infty,-2]$

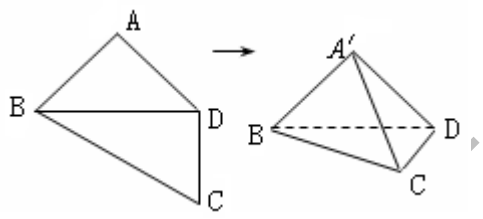
B．$[-2,-1]$



C．$[-1,2]$

D．$[2,+\infty)$

7．如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，将四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'-BCD$，使平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，则下列结论正确的是



A．$A'C\perp BD$

B．$\angle BA'C=90^\circ$

C．$\Delta A'DC$ 是正三角形

D．四面体 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}$

8．设函数 $f_1(x)=\log_2 x-(\frac{1}{2})^x$，$f_2(x)=\log_{\frac{1}{2}} x-(\frac{1}{2})^x$ 的零点分别为 x_1,x_2，则

A．$0<x_1x_2<1$　　B．$x_1x_2=1$

C．$1<x_1x_2<2$　　D．$x_1x_2\geq 2$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．i 为虚数单位，则 $\frac{2}{(1+\mathrm{i})^2}=$_____.

10．已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，则平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为_____.

11．若实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geq 0,\\ x+y\geq 2,\\ x\leq 1,\end{cases}$ 则 $2x+y$ 的最大值为_____.

12．在 ΔABC 中，若 $a=\sqrt{3},b=3$，$\angle B=\frac{2\pi}{3}$，则 $c=$____.

13．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 2，它的一个焦点与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点相同，那么双曲线的焦点坐标为_____；渐近线方程为_____.

14.在平面直角坐标系中，定义 $d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 之间的“折线距离”.

在这个定义下，给出下列命题：

① 到原点的“折线距离”等于 1 的点的集合是一个正方形；

② 到原点的“折线距离”等于 1 的点的集合是一个圆；

③ 到 $M(-1,0),N(1,0)$ 两点的“折线距离”之和为 4 的点的集合是面积为 6 的六边形；

④ 到 $M(-1,0),N(1,0)$ 两点的“折线距离”差的绝对值为 1 的点的集合是两条平行线.

其中正确的命题是_____.（写出所有正确命题的序号）

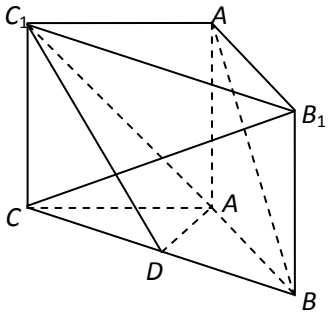
三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值；

（Ⅱ）若 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16.（本小题满分 13 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1，ACC_1A_1 均为正方形，$\angle BAC=90^\circ$，D 为 BC 中点.



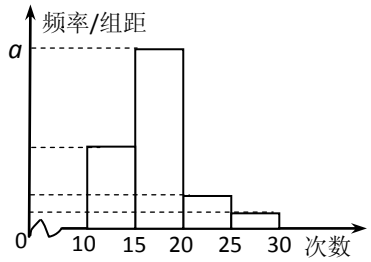
（Ⅰ）求证：A_1B // 平面 ADC_1；

（Ⅱ）求证：$C_1A\perp B_1C$.

17.（本小题满分 13 分）对某校高三年级学生参加社区服务次数进行统计，随机抽取 M 名学生作为样本，得到这 M 名学生参加社区服务的次数.根据此数据作出了频数与频率的统计表和频率分布直方图如下：

分组	频数	频率
[10,15)	10	0.25
[15,20)	24	n
[20,25)	m	p
[25,30)	2	0.05

合计	M	1



（Ⅰ）求出表中 M，p 及图中 a 的值；

（Ⅱ）若该校高三学生有 240 人，试估计该校高三学生参加社区服务的次数在区间 $[10,15)$ 内的人数；

（Ⅲ）在所取样本中，从参加社区服务的次数不少于 20 次的学生中任选 2 人，求至多一人参加社区服务次数在区间 $[25,30)$ 内的概率.

18.（本小题满分 13 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个焦点坐标为 $(1,0)$，且长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为坐标原点，椭圆 C 与直线 $y=kx+1$ 相交于两个不同的点 A,B，线段 AB 的中点为 P，若直线 OP 的斜率为 -1，求△OAB 的面积.

19.（本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=ax+\ln x$ $(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $a=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）设 $g(x)=x^2-2x+2$，若对任意 $x_1\in(0,+\infty)$，均存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围.

20.（本小题满分 14 分）已知数列$\{a_n\}$的首项为1，对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，定义$b_n=a_{n+1}-a_n$.

（Ⅰ） 若$b_n=n+1$，求a_4；

（Ⅱ） 若$b_{n+1}b_{n-1}=b_n\,(n\geq 2)$，且$b_1=a,b_2=b\,(ab\neq 0)$.

（ⅰ）当$a=1,b=2$时，求数列$\{b_n\}$的前$3n$项和；

（ⅱ）当$a=1$时，求证：数列$\{a_n\}$中任意一项的值均不会在该数列中出现无数次.

智康1对1

北京市西城区 2010 — 2011 学年度第一学期期末

高三数学参考答案及评分标准

（文科） 2011.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	C	B	B	A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $-i$ **10.** 60° **11.** 4

12. $\sqrt{3}$ **13.** $(\pm 2,0)$，$\sqrt{3}x \pm y = 0$ **14.** ①③④

注：13 题第一问 2 分，第二问 3 分；

14 题①③④选对其中两个命题得 2 分，选出错误的命题即得 0 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.若考生的解法与本解答不同，正确者可参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin^2\frac{\pi}{6}$ ……2 分

$= \frac{3}{2} - 2\times\frac{1}{4} = 1.$ ……4 分

（Ⅱ）$f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 1$ ……6 分

$= 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 1.$ ……8 分

因为 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$，所以 $-\frac{\pi}{6} \le 2x + \frac{\pi}{6} \le \frac{5\pi}{6}$， ……10 分

所以 $-\frac{1}{2} \le \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \le 1$， ……11 分

所以 $f(x)$ 的最大值为 1 ，最小值为 -2. ……13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）连结 A_1C，设 A_1C 交 AC_1 于点 O，连结 OD. ……2 分

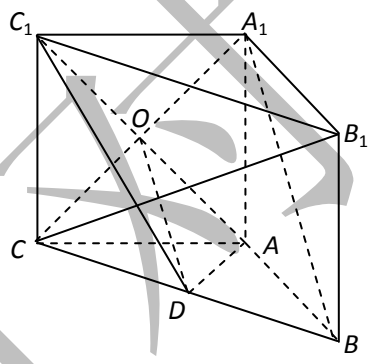
因为 ACC_1A_1 为正方形，所以 O 为 A_1C 中点，

又 D 为 BC 中点，所以 OD 为 ΔA_1BC 的中位线，

所以 $A_1B // OD$. ……4 分

因为 $OD \subset$ 平面 ADC_1，$A_1B \not\subset$ 平面 ADC_1，

所以 $A_1B //$ 平面 ADC_1. ……6 分



（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$C_1A \perp CA_1$ ……7 分

因为侧面 ABB_1A_1 是正方形，$AB \perp AA_1$，

且 $\angle BAC = 90^\circ$，

所以 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1.

又 $AB // A_1B_1$，

所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1. ……9 分

又因为 $C_1A \subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $A_1B_1 \perp C_1A$. ……10 分

所以 $C_1A \perp$ 平面 A_1B_1C. ……12 分

又 $B_1C \subset$ 平面 A_1B_1C，

所以 $C_1A \perp B_1C$. ……13 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由分组 $[10,15)$ 内的频数是 10，频率是 0.25 知，$\dfrac{10}{M} = 0.25$，

所以 $M = 40$. ……2 分

因为频数之和为 40，所以 $10+24+m+2=40$，$m=4$. ……3 分

智康1对1

$p=\frac{m}{M}=\frac{4}{40}=0.10$. ……4 分

因为 a 是对应分组 $[15,20)$ 的频率与组距的商，所以 $a=\frac{24}{40\times5}=0.12$ ……6 分

（Ⅱ）因为该校高三学生有 240 人，分组 $[10,15)$ 内的频率是 0.25，

所以估计该校高三学生参加社区服务的次数在此区间内的人数为 60 人. ……8 分

（Ⅲ）这个样本参加社区服务的次数不少于 20 次的学生共有 $m+2=6$ 人，

设在区间 $[20,25)$ 内的人为 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，在区间 $[25,30)$ 内的人为 $\{b_1,b_2\}$.

则任选 2 人共有 $(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_2,b_1),$

$(a_2,b_2),(a_3,a_4)$，$(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_4,b_1),(a_4,b_2),(b_1,b_2)$ 15 种情况，……10 分

而两人都在 $[25,30)$ 内只能是 (b_1,b_2) 一种，……12 分

所以所求概率为 $P=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.（约为 0.93）……13 分

18.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $c=1, a=\sqrt{2}b$，……2 分

又 $a^2-b^2=1$，所以 $b^2=1$，$a^2=2$. ……3 分

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……4 分

（Ⅱ）设 $A(0,1)$，$B(x_1,y_1)$，$P(x_0,y_0)$，

联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=2,\\ y=kx+1\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+4kx=0$ ……（*），……6 分

解得 $x=0$ 或 $x=-\frac{4k}{1+2k^2}$，所以 $x_1=-\frac{4k}{1+2k^2}$，

所以 $B(-\frac{4k}{1+2k^2},\frac{1-2k^2}{1+2k^2})$，$P(-\frac{2k}{1+2k^2},\frac{1}{1+2k^2})$，……8 分

因为直线 OP 的斜率为 -1，所以 $-\frac{1}{2k}=-1$，

解得 $k=\frac{1}{2}$（满足（*）式判别式大于零）. ……10 分

O 到直线 $l: y=\frac{1}{2}x+1$ 的距离为 $\frac{2}{\sqrt{5}}$，……11 分

$|AB|=\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{5}$，……12 分

所以△OAB 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$.……13 分

19.（本小题满分 14 分）

解：(Ⅰ)由已知 $f'(x)=2+\frac{1}{x}(x>0)$，……2 分

$f'(1)=2+1=3$.

故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率为 3.……4 分

(Ⅱ) $f'(x)=a+\frac{1}{x}=\frac{ax+1}{x}(x>0)$.……5 分

①当 $a\geq 0$ 时，由于 $x>0$，故 $ax+1>0$，$f'(x)>0$

所以，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.……6 分

②当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{1}{a}$.

在区间 $(0,-\frac{1}{a})$ 上，$f'(x)>0$，在区间 $(-\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，

所以，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,-\frac{1}{a})$，单调递减区间为 $(-\frac{1}{a},+\infty)$.

……8 分

（Ⅲ）由已知，转化为 $f(x)_{\max}<g(x)_{\max}$.……9 分

$g(x)_{\max}=2$……10 分

由(Ⅱ)知，当 $a\geq 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，值域为 $\mathbf{R}$，故不符合题意.

(或者举出反例：存在 $f(e^3)=ae^3+3>2$，故不符合题意.)……11 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 的极大值即为最大值，$f(-\frac{1}{a})=-1+\ln(\frac{1}{-a})=-1-\ln(-a)$，……13 分

所以 $2>-1-\ln(-a)$，

解得 $a<-\frac{1}{e^3}$. ……14 分

20.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：$a_1=1, a_2=a_1+b_1=1+2=3, a_3=a_2+b_2=3+3=6$

$a_4=a_3+b_3=6+4=10$. ……3 分

（Ⅱ）（ⅰ）解：因为 $b_{n+1}b_{n-1}=b_n$（$n\geq 2$），

所以，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $b_{n+6}=\frac{b_{n+5}}{b_{n+4}}=\frac{1}{b_{n+3}}=\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}}=b_n$，

即数列 $\{b_n\}$ 各项的值重复出现，周期为 6. ……5 分

又数列 $\{b_n\}$ 的前 6 项分别为 $1,2,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$，且这六个数的和为 7.

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则，

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$S_{3n}=S_{6k}=k(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)=7k$，

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$S_{3n}=S_{6k+3}=k(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)+b_{6k+1}+b_{6k+2}+b_{6k+3}$

$=7k+b_1+b_2+b_3\neq k+\frac{1}{2}$， ……7 分

所以，当 n 为偶数时，$S_{3n}=\frac{7}{2}n$；当 n 为奇数时，$S_{3n}=\frac{7n+3}{2}$. ……8 分

（ⅱ）证明：由（ⅰ）知：对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $b_{n+6}=b_n$，

又数列 $\{b_n\}$ 的前 6 项分别为 $1,b,b,1,\frac{1}{b},\frac{1}{b}$，且这六个数的和为 $2b+\frac{2}{b}+2$.

设 $c_n=a_{6n+i}(n\geq 0)$，（其中 i 为常数且 $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$），

所以 $c_{n+1}-c_n=a_{6n+6+i}-a_{6n+i}=b_{6n+i}+b_{6n+i+1}+b_{6n+i+2}+b_{6n+i+3}+b_{6n+i+4}+b_{6n+i+5}$

$=2b+\frac{2}{b}+2$.

所以，数列 $\{a_{6n+i}\}$ 均为以 $2b+\frac{2}{b}+2$ 为公差的等差数列. ……10 分

因为 $b>0$ 时，$2b+\frac{2}{b}+2>0$，$b<0$ 时，$2b+\frac{2}{b}+2\leq -2<0$， ……12 分

所以$\{a_{6n+i}\}$为公差不为零的等差数列，其中任何一项的值最多在该数列中出现一次.

所以数列$\{a_n\}$中任意一项的值最多在此数列中出现 6 次，

即任意一项的值不会在此数列中重复出现无数次. ……14 分

智康1对1